CB n$^{\text{o}}$1

Mathématiques - 16 Décembre 2025 - 4 heures

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Les résultats doivent être encadrés ou soulignés. Le résultat d'une question ou d'un problème peut être admis dans les questions suivantes à condition de le mentionner explicitement.

Aucun document n'est autorisé, l'usage de la calculatrice et de tout matériel électronique est interdit.

*
* *

Ce sujet comporte 4 exercices et 1 problème tous indépendants.

Exercice 1

Pour tout entier naturel non nul p, on considère les fonctions f_p et g_p définies pour tout réel x dans l'intervalle $[0; +\infty[$ par :

$$f_p(x) = 1 + \ln(x + p)$$

$$g_p(x) = x - f_p(x)$$

Partie 1 - Étude de f_1

1. Justifier que f_1 est bien définie et dérivable sur $[0; +\infty[$
2. On note $\mathcal{C}_1$ la courbe représentative de f_1. Montrer qu'une équation de la tangente T à la courbe $\mathcal{C}_1$ en 0 est $y = x + 1$.
3. Montrer que C_1 est en dessous de T sur tout l'intervalle $[0; +\infty[$. On pourra pour cela poser une fonction bien choisie et l'étudier.
4. Déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} f_1(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f_1(x)}{x}$.

Partie 2 - Étude d'une suite $(\alpha_p)_{p \in \mathbb{N}^*}$

5. Montrer que pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, l'équation $f_p(x) = x$ admet une unique solution α_p sur l'intervalle $]0; +\infty[$. (On ne cherchera pas à calculer α_p).
6. Déterminer le signe de $g_p(\alpha_{p+1})$ et en déduire que la suite $(\alpha_p)_{p \geq 1}$ est monotone.
7. Prouver que l'on a :

$$\forall p \in \mathbb{N}^*, \quad \alpha_p \geq 1 + \ln p$$

8. En déduire la limite de α_p lorsque p tend vers $+\infty$.

Partie 3 - Équivalent de α_p

Le but de cette partie est de déterminer un équivalent simple de α_p lorsque p tend vers $+\infty$.

9. Pour tout entier p, on pose $u_p = g_p(p)$.
   (a) On donne $7,3 < \mathrm{e}^2 < 7,4$. Montrer que $u_3 \geq 0$.
   (b) On donne $2,7 < \mathrm{e} < 2,8$ Montrer que $(u_p)_{p \in \mathbb{N}^*}$ est croissante et en déduire que pour tout entier $p \geq 3$, $u_p \geq 0$
10. Déduire de la question précédente que pour tout entier p supérieur ou égal à 3, $\alpha_p \leq p$
11. En déduire avec la définition de α_p que pour tout entier p supérieur ou égal à 3, $\alpha_p \leq 1 + \ln(2p)$.
12. Déduire des questions 7 et 11 un équivalent simple de α_p.

Partie 4 - Valeur approchée de α_1

On admet que le réel α_1 appartient à l'intervalle $[1, 3]$.

On définie la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ par :

$$\begin{cases} v_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad v_{n+1} = f_1(v_n) \end{cases}$$

13. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n : v_n existe et $v_n \geq 1$.

14. Montrer que pour tout réel $x \geq 0$, $\ln(1+x) \leq x$. On pourra pour cela poser une fonction bien choisie et l'étudier.

15. Montrer que pour tous réels x et y dans l'intervalle $[1,3]$ tels que $x < y$ on a :

$$\ln(1+y) - \ln(1+x) = \ln\left(1 + \frac{y-x}{1+x}\right)$$

et en déduire que pour tous réels x et y dans l'intervalle $[1,3]$ on a :

$$|\ln(1+y) - \ln(1+x)| \leq \frac{1}{2}|y-x|$$

16. Montrer que pour tout entier naturel n on a :

$$|v_n - \alpha_1| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

Indication : remarquer que pour tout n dans $\mathbb{N}$ on a $|v_{n+1} - \alpha_1| = |f_1(v_n) - f_1(\alpha_1)|$.

17. Conclure sur la limite de $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ lorsque n tend vers $+\infty$.

Exercice 2

On considère la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ définie par la donnée de $u_1 \geq 1$ et :

$$\forall n \geq 1, \quad u_{n+1} = u_n + \frac{n}{u_n}$$

1. Montrer par récurrence que (u_n) est bien définie.
2. Dans le cas particulier où $u_1 = 1$, déterminer, pour tout entier $n \geq 1$, la valeur de u_n.
3. Montrer, dans le cas général, que $(u_n)_{n\geq 1}$ est strictement croissante et tend vers $+\infty$.

On suppose désormais que $u_1 > 1$.

4. Pour tout $n \geq 1$, on note $v_n = u_n - n$.
   (a) Pour tout $n \geq 1$, exprimer v_{n+1} sous la forme $v_n f(u_n)$ où f est une fonction que l'on précisera.
   (b) Montrer que $(v_n)_{n\geq 1}$ converge.
   (c) En déduire que $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} n$.

Exercice 3 - Suites adjacentes

Les questions 1 et 2 sont indépendantes l'une de l'autre.

1. On définit la suite $(S_n)_{n\geq 2}$ par : $\forall n \geq 1, \quad S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k^2}$

   On définit ensuite les suites $(a_n)_{n\geq 1}$ et $(b_n)_{n\geq 1}$ par :

$$\forall n \geq 1, \quad a_n = S_{2n+1} \quad \text{et} \quad b_n = S_{2n}$$

   Montrer que les suites (a_n) et (b_n) sont adjacentes. Que peut-on en déduire sur la suite (S_n) ?

Exercice 4

On considère la suite définie par $u_0 = 16$, $u_1 = 2$, et pour tout entier naturel n : $u_{n+2} = \dfrac{u_n^2}{u_{n+1}}$.

1. On pose pour tout entier naturel n, $v_n = \ln(u_n)$. Vérifier que v_n est une suite récurrente linéaire d'ordre 2
2. En déduire une expression du terme général de u_n en fonction de n sous la forme la plus simple possible.

Problème - Fonctions logarithmes

On rappelle que les puissances réelles d'un nombre réel strictement positifs sont définies de la façon suivante :

$$\forall b > 0, \forall a \in \mathbb{R}, \quad b^a := \mathrm{e}^{a \ln b}$$

Les différentes parties de ce problème sont indépendantes entre elles.

Partie I - Logarithme en base b

Dans toute cette partie, b est un nombre réel strictement positif et différent de 1.

1. Justifier que la fonction $f_b : x \mapsto b^x$ est continue sur $\mathbb{R}$ et strictement monotone. On précisera le sens de variation de f_b selon la valeur de b.
2. Montrer en utilisant le théorème des valeurs intermédiaires que pour tout réel strictement positif y, il existe un unique réel x tel que $f_b(x) = y$.
3. Montrer pour tout réel strictement positif y, le nombre $x = \dfrac{\ln y}{\ln b}$ vérifie $f_b(x) = y$.

Dans toute la suite du problème, on notera $\log_b$ la fonction logarithme en base b, définie par

$$\forall x > 0, \quad \log_b(x) = \frac{\ln x}{\ln b}$$

Partie II - Propriétés de $\log_b$

4. Vérifier que pour tout réel $b > 0$, la fonction $\log_b$ est continue et strictement monotone. On précisera le sens de variation de $\log_b$ selon la valeur de b.
5. Donner la limite de $\log_b(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$ selon la valeur de b.
6. Vérifier que les propriétés suivantes sont encore vraies pour la fonction logarithme en base b :
   - $\forall (x, y) \in (\mathbb{R}^{+*})^2$, $\log_b(xy) = \log_b(x) + \log_b(y)$
   - $\forall (x, y) \in (\mathbb{R}^{+*})^2$, $\log_b\left(\dfrac{x}{y}\right) = \log_b(x) - \log_b(y)$
   - $\forall x \in \mathbb{R}^{+*}$, $\log_b\left(\dfrac{1}{x}\right) = -\log_b(x)$
   - $\forall x \in \mathbb{R}^{+*}, \forall y \in \mathbb{R}$, $\log_b(x^y) = y \log_b(x)$
7. Montrer que si a et b sont deux "bases", c'est à dire deux réels strictement positifs différents de 1, alors :

$$\forall x \in \mathbb{R}^{+*}, \quad \log_a(x) + \log_b(x) = \frac{\ln(x)\ln(ab)}{\ln(a)\ln(b)}$$

8. Calculer les valeurs exactes des nombres suivants :

   (a) $\log_3(243)$ (b) $\log_2(1/16)$ (c) $\log_5(625)$ (d) $\log_{\sqrt{\mathrm{e}}}(\mathrm{e}^{-3})$

Partie III - Moyenne logarithmique

Soient a et b deux réels strictement positifs. On définit la **moyenne arithmétique**, la **moyenne géométrique**, et la **moyenne logarithmique** de a et b, notées respectivement $M_A(a,b)$, $M_G(a,b)$, et $M_L(a,b)$, de la façon suivante :

$$M_A(a,b) = \frac{a+b}{2} \quad , \quad M_G(a,b) = \sqrt{ab} \quad , \quad M_L(a,b) = \begin{cases} a & \text{si } a = b \\ \dfrac{b-a}{\ln b - \ln a} & \text{sinon} \end{cases}$$

9. Montrer que ces trois moyennes sont **homogènes**, c'est à dire que pour tous réels strictement positifs a, b et k on a :

$$M(ka, kb) = kM(a,b)$$

10. Montrer que pour tous réels strictement positifs a et b on a : $\ln(M_G(a,b)) = M_A(\ln a, \ln b)$

11. Montrer que pour tous réels x et y strictement positifs, on a $xy \leq \dfrac{x^2+y^2}{2}$, et en déduire que pour tous réels strictement positifs a et b on a :

$$\forall a, b > 0, \ M_G(a,b) \leq M_A(a,b)$$

12. Le but de cette question est de montrer que pour tous réels positifs distincts a et b, $M_L(a,b)$ est compris entre a et b. On suppose, sans perte de généralité, que $a < b$.

   (a) Montrer que pour tout réel x strictement positif, $\ln x \leq x - 1$.

   (b) Vérifier que :

$$M_L(a,b) = a \times \frac{\frac{b}{a} - 1}{\ln(b/a)} = b \times \frac{1 - \frac{a}{b}}{-\ln(a/b)}$$

   (c) En déduire le résultat voulu.

13. Le but de cette question est de montrer que pour tous réels strictement positifs a et b, on a :

$$M_G(a,b) \leq M_L(a,b) \leq M_A(a,b)$$

   On suppose dans les questions suivantes, sans perte de généralité, que a et b sont deux réels strictement positifs tels que $a < b$.

   (a) Montrer que pour tout réel y strictement supérieur à 1, on a :

$$y \leq \frac{y^2 - 1}{2\ln y}$$

   Indication : on pourra étudier une fonction bien choisie et réutiliser le résultat de la question 12.(a)

(b) En déduire que pour tout réel x strictement supérieur à 1, on a :

$$\sqrt{x} \leq \frac{x-1}{\ln x}$$

(c) En déduire la première inégalité en posant $x = \dfrac{b}{a}$.

(d) Montrer que $\left(\dfrac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{2}\right)^2 \leq \dfrac{a+b}{2}$.

(e) Montrer que pour tout réel y strictement supérieur à 1 on a :

$$\frac{y^2-1}{2\ln y} \leq \left(\frac{1+y}{2}\right)^2$$

puis que pour tout réel x strictement supérieur à 1 : $\dfrac{x-1}{\ln x} \leq \left(\dfrac{1+\sqrt{x}}{2}\right)^2$

Indication : on pourra étudier la fonction $g : y \mapsto \ln(y) - 2\dfrac{y-1}{y+1}$

(f) En déduire la seconde inégalité en posant $x = \dfrac{b}{a}$.

Pour tout réel p différent de 0 et de 1, on définit la **moyenne de Stolarsky** d'ordre p de deux nombres réels strictement positifs a et b par :

$$S_p(a,b) = \begin{cases} a & \text{si } a = b \\ \left(\dfrac{b^p - a^p}{p(b-a)}\right)^{1/(p-1)} & \text{sinon} \end{cases}$$

14. Montrer que pour tous réels strictement positifs a et b :

$$S_2(a,b) = M_A(a,b) \quad \text{et} \quad S_{-1}(a,b) = M_G(a,b)$$

15. Le but de cette question est de montrer que pour tous réels a et b strictement positifs, $M_L(a,b) = \lim\limits_{p\to 0} S_p(a,b)$. On fixe a et b deux réels strictement positifs distincts.

(a) Montrer que pour tout réel p différent de 0 et de 1 et tout couple (a,b) de réels strictement positifs distincts :

$$S_p(a,b) = \left(\frac{a^p}{b-a}\right)^{1/(p-1)} \times \left(\frac{\left(\frac{b}{a}\right)^p - 1}{p}\right)^{1/(p-1)}$$

(b) Montrer, en utilisant une limite par taux d'accroissements, que

$$\lim_{p\to 0} \frac{\left(\frac{b}{a}\right)^p - 1}{p} = \ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

(c) En déduire le résultat voulu.